Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

13. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

3 Gleichstromschaltungen

3.1 Der einfache elektrische Stromkreis

Der einfache elektrische Stromkreis besteht zumindest aus einer Spannungs- bzw. Stromquelle, einem Verbraucherwiderstand und den leitenden, widerstandsbehafteten Verbindungen zur Quelle.

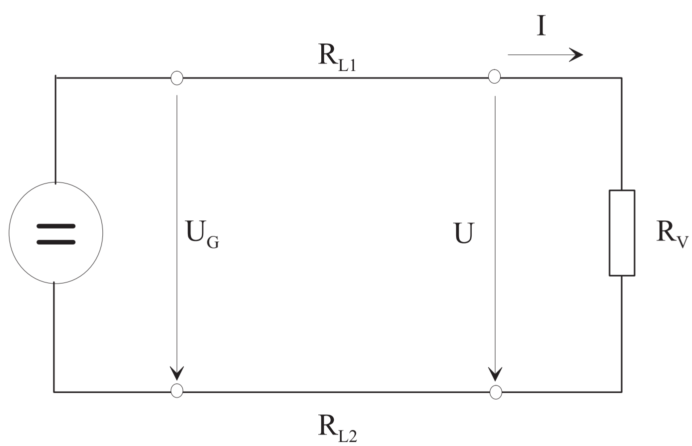

Abbildung 3.1: Einfacher elektrischer Stromkreis.

Die von der Gleichspannungsquelle erzeugte Spannung an den Klemmen wird durch den Spannungszählpfeil U_G dargestellt. Die Zuleitungswiderstände R_{L1} und R_{L2} bedeuten für den elektrischen Strom einen Widerstand. An den Klemmen des Verbrauchers R_V wird daher nur eine um den Spannungsabfall auf den Leitungen kleinere Spannung U auftreten. Das rechteckige Schaltsymbol stellt den elektrischen Widerstand R_V des Verbrauchers dar. In ebensolcher Darstellung können die Leitungswiderstände R_{L1} und R_{L2} im sogenannten Widerstandsersatzschaltbild, häufig nur als Ersatzschaltbild bezeichnet, dargestellt werden. Die dabei auftretenden elektrischen Spannungsabfälle werden wiederum durch Spannungszählpfeile dargestellt.

Im Ersatztschaltbild muß folgende Regelung eingehalten werden. Der Strom I fließt von der positiven Klemme der Spannungsquelle zur negativen. Ist die Richtung des Stromes I festgelegt, so sind die Zählpfeile der Spannungsabfälle über den Ohmschen Widerständen in derselben Richtung wie die des elektrischen Stromes I zu wählen. Im

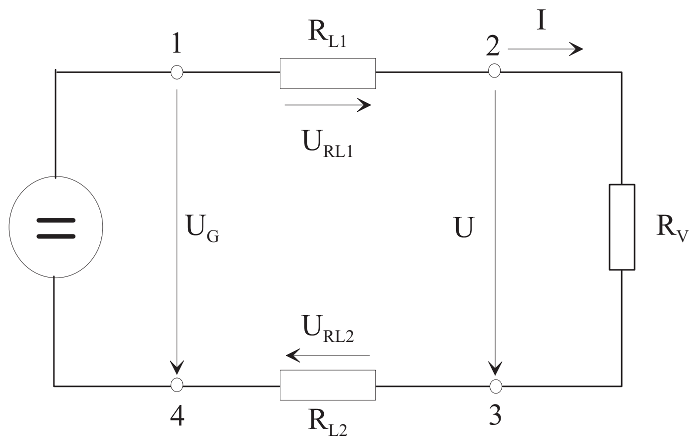

Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild des einfachen Stromkreises.

Widerstandsersatzschaltbild Abbildung 3.2 sind die, auf die Leiterlänge verteilten Zuleitungswiderstände durch diskrete Widerstände R_{L1} und R_{L2} ersetzt. Damit gilt im Widerstandsersatzschaltbild, daß alle darin eingezeichneten Leitungen *ideal*, das heißt unendlich gut leitend sind. Entsprechend dem Ohmschen Gesetz errechnen sich die einzelnen Spannungsabfälle zu:

$$U_{RL1} = I\, R_{L1} \qquad U_{RL2} = I\, R_{L2} \qquad U = I\, R. \tag{3.1}$$

3.2 Zweipole

Im Ersatzschaltbild in Abbildung 3.2 werden nur Elemente mit zwei Anschlüssen verwendet. Derartige Schaltelemente bezeichnet man als **Zweipole**. Durch das Strom-Spannungsverhalten an den Klemmen wird der Zweipol in seinem elektrischen Verhalten eindeutig beschrieben.

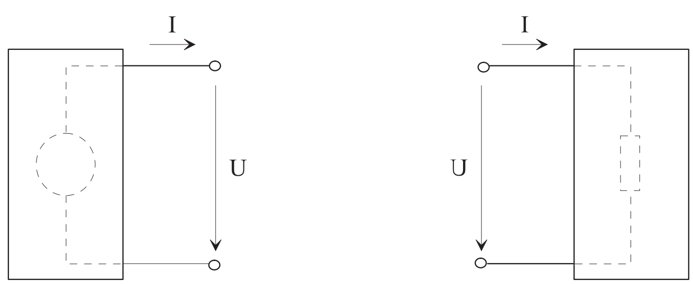

Abbildung 3.3: Verhältnisse an einem allgemeinen Zweipol.

Am linken Zweipol in Abbildung 3.3 werden die tatsächlichen Strom- und Spannungsverhältnisse an den Klemmen eines Erzeugers (Quelle) dargestellt. Strom- und

Spannungszählpfeil sind entgegengesetzt gerichtet. Diese Richtungszuordnung wird als **Erzeugerpfeilsystem, EZS** bezeichnet. In strichelierter Weise ist beispielsweise eine schon beschriebene Gleichspannungsquelle eingezeichnet.

Auf der rechten Seite in Abbildung 3.3 sind Strom- und Spannungszählpfeil in gleicher Richtung dargestellt. Ein derartiges Klemmenverhalten charakterisiert den elektrischen Zweipol als Verbraucher. Diese Darstellung wird als **Verbraucherzählpfeilsystem, VZS** bezeichnet. Zur Beschreibung eines Ersatzschaltbildes wird in der Regel nur ein System verwendet. Im allgemeinen ist dies das Verbraucherzählpfeilsystem. Wird in diesen Arbeitsunterlagen nicht das VZS verwendet, so wird extra darauf hingewiesen.

An einem Ohmschen Verbraucher ist das Produkt aus Strom mal Spannung, die elektrische Leistung oder auch Verlustleistung, stets positiv!

Quellen werden solcher Art als **aktive** und Verbraucher als **passive** Zweipole bezeichnet.

3.2.1 Zusammenschaltung von Zweipolen

Durch die Zusammenschaltung von aktiven und passiven Zweipolen kann ein elektrisch beliebig komplexes Gebilde, das sogenannte **Netzwerk** entstehen. Zu dessen Analyse müssen bestimmte Regeln berücksichtigt werden.

Das erste Kirchhoffsche Gesetz

Aus der Kenntnis der Quellenfreiheit des elektrischen Strömungsfeldes (es gibt keine Quellen und Senken von $\vec{J}$) kann zunächst der sogenannte **Knotenpunktsatz** oder das **erste Kirchhoffsche Gesetz** hergeleitet werden. Man betrachte folgende allgemeine Zusammenschaltung von Ohmschen Widerständen in Abbildung 3.4.

Bildet man darin über eine beliebig gewählte jedoch geschlossene Oberfläche Γ das Flächenintegral gemäß Gleichung 2.4

$$\oint_\Gamma \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0, \tag{3.2}$$

so ergibt dies immer Null. Führt man weiter von allen Zu- und Abführungen zum Volumen das Integral aus, so ergeben sich nur Beiträge zum Gesamtintegral, wenn am entsprechenden Oberflächenelement $d\vec{A}$ eine Stromdichte $\vec{J}$ ungleich Null vorliegt. Durch die unterschiedlichen Richtungen der immer nach außen gerichteten Flächennormalen (Richtung von $d\vec{A}$) ergeben sich die ins Volumen fließenden Sröme mit negativen, die

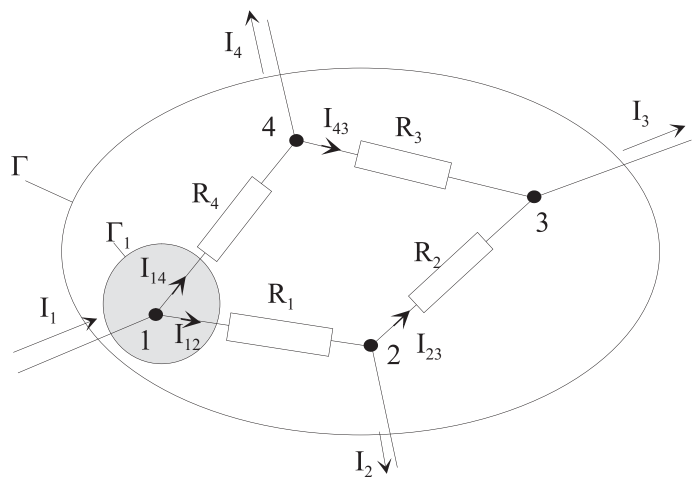

Abbildung 3.4: Zum ersten Kirchhoffschen Gesetz.

aus dem Volumen fließenden Ströme mit positiven Vorzeichen. Für das von Γ begrenzte Volumen folgt :

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad bzw. \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4. \tag{3.3}$$

Die Summe der in ein geschlossenes Volumen (in unserem Falle mit der Berandung Γ) **hinein- und herausfließenden Ströme ist immer gleich Null**.

Reduziert man nun dieses Volumen Γ auf das Gebiet rund um einen Knoten, z.B. den Knoten 1 mit der Oberfläche Γ_1, so folgt:

$$-I_1 + I_{14} + I_{12} = 0 \quad bzw. \quad I_1 = I_{14} + I_{12} \tag{3.4}$$

Dies gilt für alle beliebigen Volumen in einem Netzwerk, also auch für jeden einzelnen Punkt einer Stromverzweigung (Knoten). Somit gilt für eine beliebigie Anzahl von zu- und abfließenden Strömen in einem Knoten in einem allgemeinen Netzwerk (Abbildung 3.5:

Die Summe aller zu- und abfließenden Ströme in einem Knoten eines elektrischen Netzwerks ist immer Null

$$\Sigma_{i=1}^{n} I_i = 0. \tag{3.5}$$

Diese Beziehung wird als **das erste Kirchhoffsche Gesetz** bezeichnet. Oftmals wird dafür auch der Begriff **Knotenregel** verwendet.

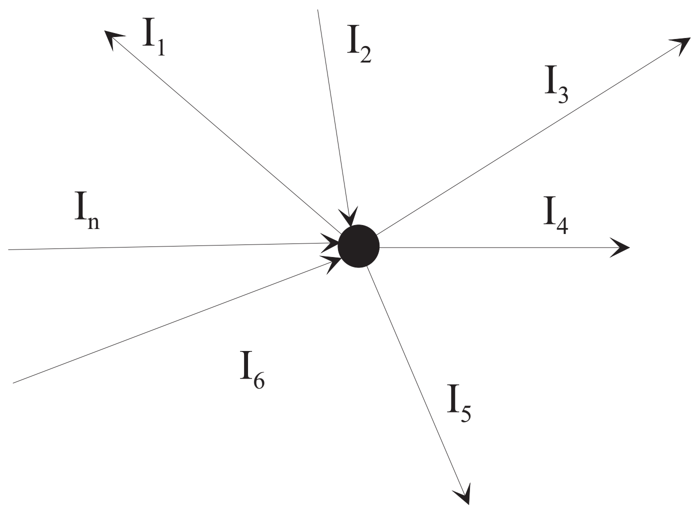

Abbildung 3.5: Knoten im Netzwerk mit n Strömen.

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz

Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz werden die Spannungsverhältnisse in einem Netzwerk mit beliebig vielen Quellen und Verbrauchern beschrieben. Folgender Ausschnitt aus einem Netzwerk soll zur Beschreibung herangezogen werden:

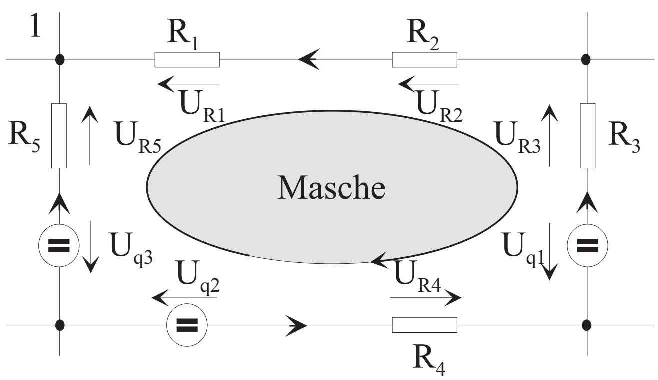

Abbildung 3.6: Zum zweiten Kirchhoffschen Gesetz.

Der Netzwerkausschnitt enthält drei Gleichspannungsquellen mit den Klemmenspannungen U_{q1}, U_{q2} und U_{q3}. Entsprechend der Konvention, daß Klemmenspannung und Klemmenstrom bei Quellen entgegengerichtet sind, ist durch die Vorgabe der Zählpfeile für die Klemmenspannungen auch die Stromrichtung in diesen Zweigen festgelegt. Die Verbindung von einem Knoten zu einem benachbarten wird dabei als Zweig bezeichnet. Die Richtungen der Spannungsabfälle U_{R1} bis U_{R5} über den Widerständen R_1 bis R_5 sind durch die Richtungen der Ströme in den einzelnen Zweigen vorgegeben (Verbraucher, passive Zweipole). Mit den solcherart gefundenen Teilspannungen kann eine Spannungsbilanz entlang einer geschlossenen Schleife (Masche) gezogen werden.

Durchläuft man eine Masche, so stellt man fest, daß in den einzelnen Knoten unterschiedliche Potentiale vorherrschen. Man kann den Umlauf der Masche in einem beliebigen Knoten beginnen. Ebenso ist der Umlaufsinn wählbar. Durchläuft man eine Masche und beginnt beispielsweise im Knoten 1 mit dem Potential ϕ_1, so stellt man fest, daß die Potentiale in den einzelnen Knoten der Masche unterschiedliche Werte aufweisen. Beendet man die Masche jedoch wieder im Ausgangsknoten 1, so muß dort wieder dasselbe Potential ϕ_1 erreicht werden. Das bedeutet, durch einen geschlossenen Maschenumlauf ist die gesamte, durchschrittene Potentialdifferenz **Null**.

Zunächst weist man allen Elementen im Ersatzschaltbild, d.h. sowohl an den aktiven als auch an den passiven Zweipolen die Spannungszählpfeile zu. Anschließend summiert man alle Teilspannungen entlang der gewählten Masche. Dabei werden die Teilspannungen, deren Richtungen dem Maschenumlaufsinn gleichen, positiv, alle anderen negativ, gezählt. Diese Summe muß Null ergeben. Für unsere Masche in Abbildung 3.6 folgt daher:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} + U_{q1} - U_{R4} + U_{q2} - U_{q3} + U_{R5} = 0. \tag{3.6}$$

Nach dem Umformen von Gleichung 3.6, indem man die Spannungen aller aktiven Elemente auf einer Seite läßt, folgt:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} - U_{R4} + U_{R5} = -U_{q1} - U_{q2} + U_{q3}. \tag{3.7}$$

Aus Gl. 3.7 erkennt man, daß die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungsquellen der Summe aller Spannungen an den passiven Zweipolen entspricht. Für eine allgemeine Masche mit m Spannungsabfällen U_{Rm} an passiven Zweipolen und n Quellenspannungen U_{qn} gilt :

$$\Sigma_{j=1}^{n} U_{qj} - \Sigma_{i=1}^{m} U_{Ri} = 0 \quad bzw. \quad \Sigma_{j=1}^{n} U_{qj} = \Sigma_{i=1}^{m} U_{Ri}. \tag{3.8}$$

In Worten gefaßt, besagt **die Kirchhoffsche Maschenregel** bzw. **das zweite Kirchhoffsche Gesetz**:

Die Summe aller Spannungen bei einem vollständigen Maschenumlauf ergibt immer Null!

Serienschaltung von Ohmschen Widerständen

Die **Serien- oder Reihenschaltung** von Ohmschen Widerständen wird am nachfolgendem Beispiel diskutiert. In Abbildung 3.7, links sind drei Widerstände in Reihe geschaltet. Diese werden von einer Gleichspannungsquelle mit einer Klemmenspannung U gespeist.

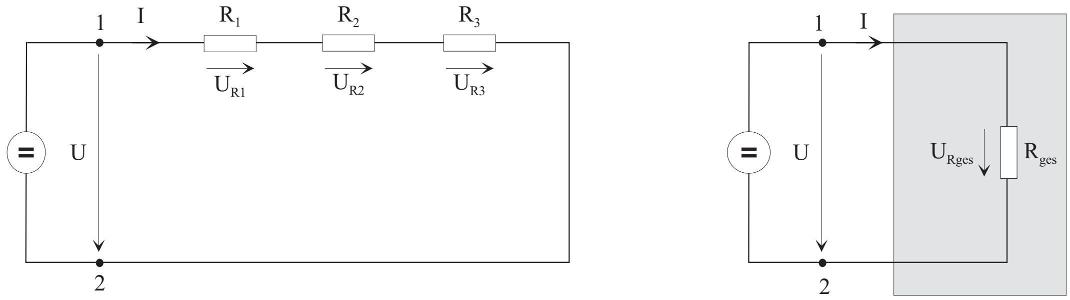

Abbildung 3.7: Serienschaltung Ohmscher Widerstände.

Die grundlegende Eigenschaft bei einer Serienschaltung von Widerständen besteht darin, daß **alle** Widerstände vom gleichen Strom I durchflossen werden. Bei Kenntnis der Widerstandswerte können die Spannungsabfälle an den Widerständen mittels des Ohmschen Gesetzes angegeben werden. An den Klemmen 1 und 2 Liegt eine Spannung U und ein Strom I fließt in die Serienschaltung.

Dieses elektrische Verhalten an den Klemmen kann nun auch durch einen, an Stelle der Serienschaltung eingebrachten Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand R_{ges} nachgebildet werden (Abbildung 3.7, rechts). Bildet man in der Reihenschaltung 3.7, links den Maschenumlauf, so folgt dafür:

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = U \quad bzw. \quad IR_1 + IR_2 + IR_3 = U. \tag{3.9}$$

Für den Ersatzzweipol rechts gilt naturgemäß:

$$U_{Rges} = U \quad bzw. \quad IR_{ges} = U. \tag{3.10}$$

Soll das Klemmenverhalten beider Schaltungen gleich sein, so müssen sich der Strom I und die Spannung U an den Klemmen gleichen. Die Gleichsetzung der Spannung U aus den Gleichungen 3.9 und 3.10 ergibt:

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{ges}, \tag{3.11}$$

und die Division durch den Strom I führt zum Ersatzwiderstand der Reihenschaltung:

$$R_1 + R_2 + R_3 = R_{ges}. \tag{3.12}$$

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung errechnet sich aus der Summe aller Einzelwiderstände.

Allgemein gilt für die Serienschaltung von n Ohmschen Widerständen:

$$R_{ges} = \Sigma_{i=1}^{n} R_n. \tag{3.13}$$

Durch die Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen kann folglich eine Erhöhung des Gesamtwiderstandes erreicht werden.

Parallelschaltung von Ohmschen Widerständen

In ähnlicher Weise wie bei der Behandlung der Serienschaltung kann hier für die Parallelschaltung von Widerständen ein Ersatzzweipol mit elektrisch gleichem Klemmenverhalten gefunden werden. Abbildung 3.8, links zeigt drei parallel geschaltete Ohmsche Widerstände. Diese Schaltung wird wieder von einer Spannungsquelle mit der Klemmenspannung U gespeist. In die Parallelschaltung fließt der Strom I.

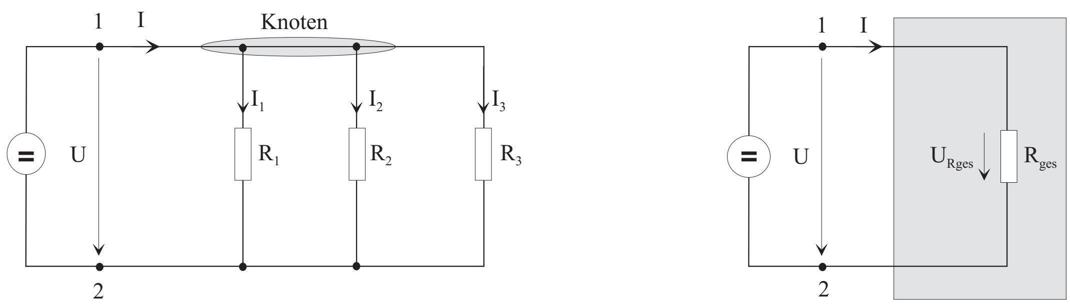

Abbildung 3.8: Parallelschaltung Ohmscher Widerstände.

Alle parallel geschalteten Widerstände liegen an derselben Spannung U. Je nach Größe der einzelnen Widerstände wird nun über diese ein, dem Ohmschen Gesetz entsprechender Strom fließen. Gemäß der Knotenregel (erstes Kirchhoffsches Gesetz) muß die Summe aller Ströme an einem Knoten Null ergeben. Für diesen Fall gilt daher:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad bzw. I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}. \tag{3.14}$$

Für den Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand R_{ges} gilt an den Klemmen:

$$I = \frac{U}{R_{ges}}. \tag{3.15}$$

Klemmenstrom- und Spannung müssen wieder gleich sein. Das Gleichsetzen des Stromes I ergibt:

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_{ges}}, \tag{3.16}$$

und die Division durch U führt zu:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{ges}}. \tag{3.17}$$

Für eine Parallelschaltung mit m Ohmschen Widerständen gilt allgemein:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \Sigma_{i=1}^{m} \frac{1}{R_i}. \tag{3.18}$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte aller Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes

In Leitwerten geschrieben lautet Gleichung 3.18

$$G_{ges} = \Sigma_{i=1}^{m} G_i. \tag{3.19}$$

Führt man dies beispielsweise für zwei Widerstände mit $R_1 = 2\Omega$ und $R_2 = 4\Omega$ aus, so folgt :

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\Omega.$$

Der Ersatzwiderstand R_{ges} einer Parallelschaltung ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand! Durch eine Parallelschaltung wird immer eine Verminderung des Gesamtwiderstandes erreicht.

3.2.2 Zusammenschaltung von Quellen mit Verbrauchern

Im Ersatzschaltbild eines einfachen elektrischen Stromkreises (3.2) wurde eine Gleichspannungsquelle mit der Klemmenspannung U_G mit einer Serienschaltung von drei Widerständen verbunden. Das Verhalten der Quellen ist im allgemeinen nicht unabhängig von den an den Klemmen zugeschalteten Netzwerken. Die Eigenschaften von Spannungs- und Stromquellen bei unterschiedlicher Belastung werden nachfolgend erläutert.

Allgemeine Eigenschaften von Quellen

Die möglichen Belastungen von Quellen liegen zwischen zwei Grenzfällen. In Abbildung 3.9 sind dafür die entsprechenden aktiven Zweipole und deren Beschaltung dargestellt.

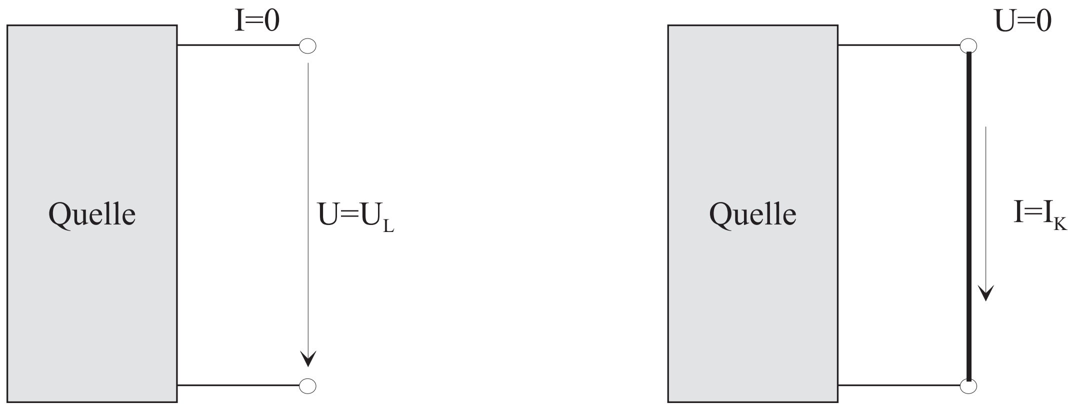

Abbildung 3.9: Leerlauf und Kurzschluß einer Quelle.

Die Quelle auf der linken Seite ist unbelastet, d.h. es ist kein Widerstand (gleichbedeutend mit $R = \infty$ zugeschaltet. Diesen Belastungszustand nennt man **Leerlauf**. An den Klemmen herrscht die Leerlaufspannung $U = U_L$, der Strom muß $I = I_L = 0$ sein. Auf der rechten Seite in Abbildung 3.9 ist der zweite Extremfall einer Belastung dargestellt. An den Klemmen der Quelle wird ein unendlich gut leitender Widerstand, d.h. $R = 0$ zugeschaltet. Diese Belastung wird als **Kurzschluß** bezeichnet. Es fließt der Kurzschlußstrom $I = I_K$. Bedingt durch den Ohmschen Widerstand $R = 0$ an den Klemmen kann kein Spannungsabfall entstehen, sodaß im Kurzschlußfall für die Klemmenspannung $U = U_K = 0$ gelten muß. Nachdem zu beobachten ist, daß im Kurzschlußfalle der Kurzschlußstrom, obwohl $R = 0$ gilt, nicht unendlich hoch wird, muß eine genauere Beschreibung der Quellen gefunden werden.

Die belastete Spannungsquelle

Eine **ideale** Spannungsquelle soll, unabhängig von der angeschlossenen Last, immer eine konstante Klemmenspannung U liefern. Dies widerspricht den Erfahrungstatsachen. Vielmehr ist feststellbar, daß ein erhöhter Stromfluß einen nicht unbedeutenden Spannungsrückgang an den Klemmen der Quelle zur Folge hat. Im Inneren einer Gleichspannungsquelle (z.B. Akkumulator, Batterie) befinden sich widerstandsbehaftete Leitungen, wie Wicklungsdrähte, Elektrolyte, ...). In Summe wird daher, abhängig von der Stromstärke I auch im Inneren der Quelle ein Spannungsabfall auftreten, sodaß an den Klemmen der Quelle eine um diesen Spannungsabfall verringerte Spannung U herrschen wird. Im Ersatzschaltbild einer **realen** Spannungsquelle kann man dies durch einen in Reihe geschalteten Innenwiderstand R_i berücksichtigen (Abbildung 3.10):

Über den Lastwiderstand R_L fließt der Strom I_L. Am Innenwiderstand R_i der Quelle fällt der Spannungsfall U_i ab. Entsprechend der Maschenregel ergibt sich die Klemmen-

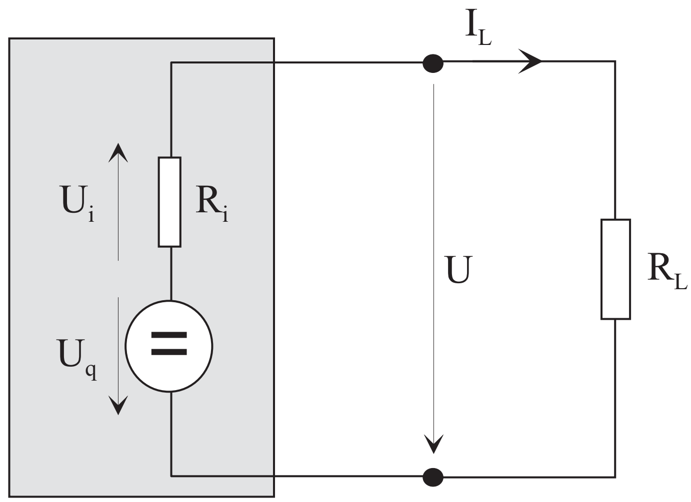

Abbildung 3.10: Elektrische Verhältnisse an einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

spannung U aus:

$$U_q = U_i + U \quad bzw. \quad U_q = I_L(R_i + R_L). \tag{3.20}$$

Der dabei fließende Strom wird durch die beiden Widerstände R_i und R_L begrenzt:

$$I_L = \frac{U_q}{R_i + R_L}. \tag{3.21}$$

Mit dieser Beziehung folgt aus Gleichung 3.20 für die Klemmenspannung

$$U = I_L R_L = \frac{U_q}{R_i + R_L} R_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_q = U_q - I_L R_i. \tag{3.22}$$

Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle soll möglichst klein, im Idealfall Null sein, um die Konstanz der Klemmenspannung bei unterschiedlichen Belastungen zu gewährleisten!

Diskutiert man die Beziehung $U = U_q - I_L R_i$, so erkennt man, daß für den Strom $I_L = 0$ die Klemmenspannung U gleich der Quellenspannung U_q, gleichbedeutend mit der Leerlaufspannung U_L, den größten Wert annimmt. Bei Kurzschluß hingegen wird der Kurzschlußstrom I_K nur durch den inneren Widerstand R_i der Quelle begrenzt. Dieses Quellenverhalten kann in einem Spannungs-Stromdiagramm dargestellt werden (Abbildung 3.11):

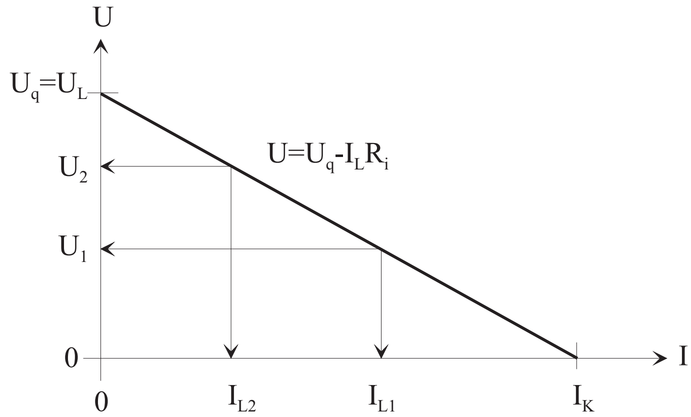

Abbildung 3.11: Belastungskennlinie einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

Durch zwei Belastungen mit unterschiedlichen Widerständen R_{L1} und R_{L2} können die Klemmenspannungen U_{L1} und U_{L2} mit den Strömen I_{L1} und I_{L2} gemessen werden. Daraus kann man den Innenwiderstand der Spannungsquelle durch

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_{L1} - I_{L2}} \tag{3.23}$$

ermitteln.

Die belastete Stromquelle

Bei der Spannungsquelle war gefordert, daß an deren Klemmen eine von der Belastung unabhängige, konstante Spannung vorherrscht. In ähnlicher Weise kann man auch fordern, daß eine Quelle einen konstanten Strom liefern soll. Ein aktiver Zweipol, der einen gleichbleibenden Strom in ein Netzwerk einspeist, nennt man **Stromquelle**. Auch in diesem Fall wird eine, von der Belastung beeinflußte Verkleinerung des Stromes aus der Stromquelle feststellbar sein. Das Verhalten kann mit Hilfe des in Abbildung 3.12 dargestellten Ersatzschaltbildes beschrieben werden:

Die Stromquelle liefert einen Quellenstrom I_q. Parallel zu dieser wird ein innerer Leitwert $G_i = \frac{1}{R_i}$ geschaltet. Entsprechend der Größe des Lastwiderstandes R_L bzw. dessen Leitwertes G_L wird nun eine Spannung U an den Klemmen vorherrschen, da ja

$$U = I_L R_L = I_L \frac{1}{G_L} \tag{3.24}$$

gilt. Diese Spannung bestimmt auch den über den inneren Leitwert G_i fließenden

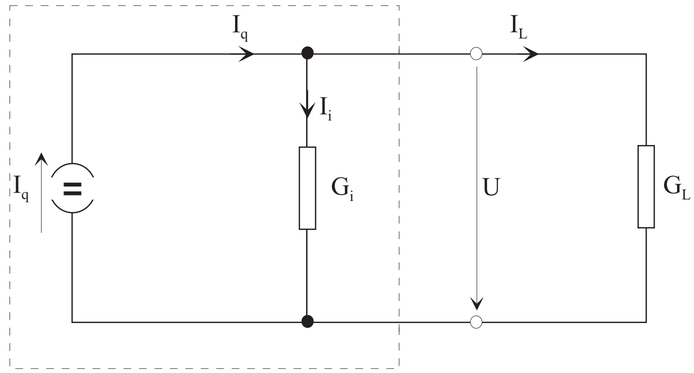

Abbildung 3.12: Elektrische Verhältnisse an einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

Strom I_i :

$$I_i = U\,G_i. \tag{3.25}$$

Um diesen Wert I_i ist nun der Strom I_L an den Klemmen geringer als der Quellenstrom I_q, da ja am Knoten im Inneren der Quelle die Knotenregel gilt:

$$I_q = I_i + I_L = (G_i + G_L)U. \tag{3.26}$$

Mit der Beziehung für die Klemmenspannung aus Gleichung 3.26

$$U = \frac{I_q}{G_i + G_L} \tag{3.27}$$

errechnet sich der Strom an den Klemmen zu

$$I_L = G_L U = \frac{G_L}{G_i + G_L} I_q = I_q - G_i U. \tag{3.28}$$

Je höher der Innenwiderstand R_i bzw. je niedriger dessen Leitwert G_i einer Stromquelle ist, umso geringer ist die Abhängigkeit des Klemmenstromes von der Belastung. Bei einer idealen Stromquelle ist der innere Widerstand unendlich groß. Dies wird im Schaltsymbol der Stromquelle durch die Unterbrechung des Kreises dargestellt.

Das allgemeine Verhalten einer Stromquelle bei unterschiedlichen Belastungen läßt sich wieder durch ein Kennline, in diesem Fall durch die Strom- Spannungskennlinie darstellen (Abbildung 3.13).

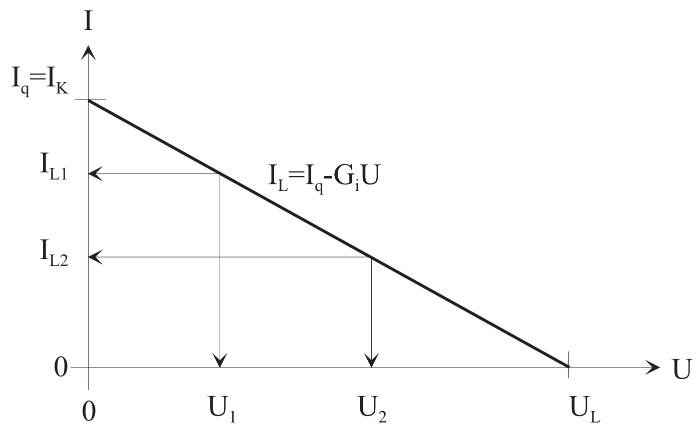

Abbildung 3.13: Belatsungskennlinie einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

Auch in diesem Fall kann durch zwei unterschiedlichen Belastungen der Innenwiderstand, im jetzigen Falle der innere Leitwert G_i durch

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_{L1} - I_{L2}}{U_2 - U_1} \tag{3.29}$$

ermittelt werden.

3.2.3 Leistungsanpassung

In den vorherigen Abschnitten wurde dargestellt, daß reale Quellen unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt werden können. Es ist nun sinnvoll, für eine gegebene Quelle, das heißt, mit vorgegebener Quellenspannung U_q und gegebenem inneren Widerstand R_i eine optimale Belastung zu finden. Das Ziel dabei ist, daß die Quelle dem Verbraucher (der Last) bei möglichst geringen Verlusten eine maximale Leistung abgeben kann. Verluste werden dabei sowohl in der Quelle, bedingt durch R_i und in den Zuleitungen entstehen. Bei der Herleitung des optimalen Belastungspunktes müssen diese Widerstände unbedingt mitberücksichtigt werden.

In Abbildung 3.14 sind die Zählpfeile bei einem allgemeinen Verbraucherwiderstand R_v dargestellt. Die von der Quelle gelieferte Leistung wird darin mit P_q bezeichnet. Sie errechnet sich zu :

$$P_q = \frac{U_q^2}{R_i + R_v}. \tag{3.30}$$

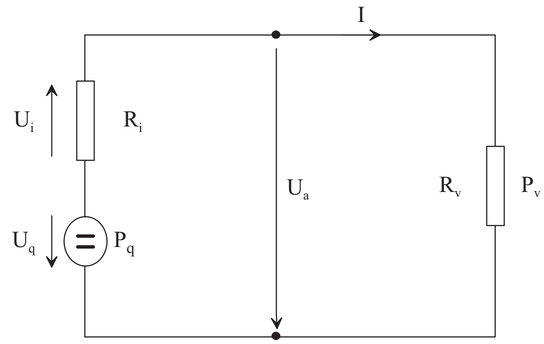

Abbildung 3.14: Reale Spannungsquelle mit Verbraucher.

Der durch alle Widerstände begrenzte Strom I entspricht der Beziehung:

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_v}. \tag{3.31}$$

Daraus folgt die Leistung P_v am Verbraucher:

$$P_v = I^2 R_v = \frac{U_q^2}{(R_i + R_v)^2} R_v. \tag{3.32}$$

Im Verbraucherwiderstand R_v ist auch der Widerstandsanteil der Zuleitungen mitberücksichtigt. Die Leistung am Verbraucher ($P_v = f(R_v)$) ist somit in zweiter Ordnung vom Lastwiderstand R_v abhängig.

Für $R_v = 0$, dem Kurzschlußfall ist die Verlustleistung $P_v = 0$. Ebenso ist die Leistung im Leerlauf, das heißt, bei $R_v = \infty$ gleich Null. Zwischen zwei Nullstellen einer Funktion muß immer ein Extremalwert bestehen. Aus der Differentiation der Verlustleistung P_v (Gleichung 3.32) nach dem Verlustwiderstand R_v und anschließendem Nullsetzen erhält man den optimalen Wert für R_v :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_v}{\partial R_v} &= U_q^2 \left[\frac{1}{(R_i + R_v)^2} + \frac{-2R_v}{(R_i + R_v)^3} \right] \\
&= U_q^2 \frac{R_i + R_v - 2R_v}{(R_i + R_v)^3} = U_q^2 \frac{R_i - R_v}{(R_i + R_v)^3} = 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Somit ergibt sich der optimale Belastungswiderstand der Quelle zu

$$R_i = R_v. \tag{3.34}$$

Dieser Belastungszustand wird als Leistungsanpassung bezeichnet. **Bei Widerstandsgleichheit zwischen Quellen-Innenwiderstand und Lastwiderstand, d.h.** $R_i =$

R_v**, läßt sich an einem Verbraucher die maximale Leistungsausbeute erzielen**!
Mit diesen Widerstandswerten errechnet sich die maximale Leistung an R_v zu:

$$P_{v\,max} = \frac{U_q^2}{4R_i} = \frac{U_q^2}{4R_v}. \tag{3.35}$$

Für diese Leistung am Verbraucher muß die Quellenleistung

$$P_q = \frac{U_q^2}{2R_i} = \frac{U_q^2}{2R_v} \tag{3.36}$$

betragen. Definiert man noch den sogenannten **Wirkungsgrad** η als das Verhältnis der Leistung am Verbraucher zur Leistung der Quelle

$$\eta = \frac{P_v}{P_q} = \frac{R_v}{R_i + R_v}, \tag{3.37}$$

so erhält man einen maximal möglichen Wirkungsgrad von

$$\eta_{max} = \frac{P_{v\,max}}{P_q} = 0,5. \tag{3.38}$$

Der Verlauf des Wirkungsgrades, abhängig vom Verhältnis der Widerstände $\frac{R_v}{R_i}$ ist in Abbildung 3.15 dargestellt.

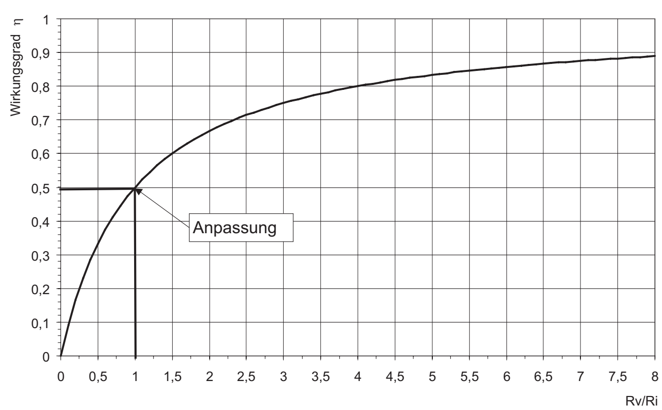

Abbildung 3.15: Abhängigkeit des Wirkungsgrades η vom Widerstandsverhältnis R_v *zu* R_i.